# 37. PARABOLA V ANALYTICKÉ GEOMETRII

## 37.1. Napiš rovnici paraboly, která má osu rovnoběžnou s osou y a prochází body $A[0;-60], B[4;-28], C[8;36]$.

**ŘEŠENÍ:**

$$(0-m)^2 = 2p(-60-n)$$
$$(4-m)^2 = 2p(-28-n)$$
$$(8-m)^2 = 2p(36-n)$$

$$m^2 = -120p - 2pn \qquad (1)$$
$$16 - 8m + m^2 = -56p - 2pn \qquad (2)$$
$$64 - 16m + m^2 = 72p - 2pn \qquad (3)$$

$$(1)-(2) \qquad -16 + 8m = -64p$$
$$(1)-(3) \qquad -64 + 16m = -192p$$

$$p = \frac{1}{2}, m = -2, n = -64$$

$$P: (x+2)^2 = y + 64$$

Je-li osa rovnoběžná s osou $y$, vybereme rovnici:
$P: (x-m)^2 = 2p(y-n)$ kde souřadnice vrcholu jsou $V[m;n]$.

Do této rovnice dosadíme všechny zadané body, dostaneme tak soustavu tří rovnic, kterou vyřešíme dvojím odečtením dvojice rovnic od sebe.

## 37.2. Urči souřadnice vrcholu, ohniska a rovnici řídící přímky paraboly $P: x^2 - 6x - 4y - 11 = 0$.

**ŘEŠENÍ:**

$$P: x^2 - 6x - 4y - 11 = 0$$
$$P: (x^2 - 6x + 9) - 9 - 4y - 11 = 0$$
$$P: (x-3)^2 = 4y + 20$$
$$P: (x-3)^2 = 4(y+5)$$
$$V[3;-5], p = 2, F[3;-4], d: y = -6$$

Na levé straně provedeme úpravu na čtverec. Zůstane tam jenom druhá mocnina závorky a zbylé členy převedeme na pravou stranu. Vytknutím čísla 4 dostaneme hodnotu parametru $p$.

Pro určení ohniska i řídící přímky doporučuji načrtnout obrázek.

## 37.3. Najdi průsečíky paraboly $P: (x-5)^2 = 2(y+3)$ a přímky $p: x + y - 6 = 0$.

**ŘEŠENÍ:**

$$x^2 - 10x + 25 = 2y + 6$$
$$y = 6 - x$$

$$x^2 - 10x + 25 = 12 - 2x + 6$$
$$x^2 - 8x + 7 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{8 \pm 6}{2} \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = 7$$

a) $x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 5 \Rightarrow P_1[1;5]$

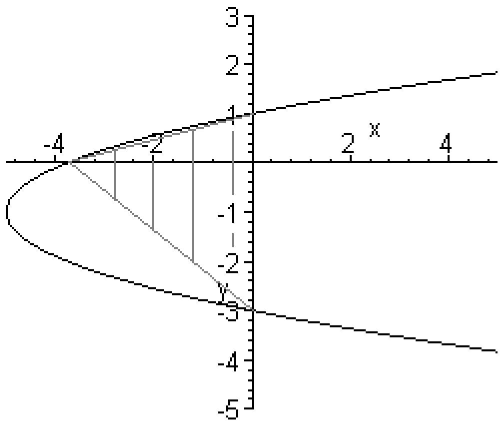
b) $x_2 = 7 \Rightarrow y_2 = -1 \Rightarrow P_2[7;-1]$

Z rovnic paraboly a přímky sestavíme soustavu dvou rovnic, jedné lineární a jedné kvadratické. Z lineární rovnice vyjádříme $y$, dosadíme do kvadratické.

Dostaneme 2 hodnoty $x$ a ke každé dopočítáme $y$. Přímka má s parabolou 2 společné body.

**37.4. Je dána parabola, která má osu rovnoběžnou s osou x a vrchol $V[-5;-1]$. Osu y protíná ve dvou bodech, jejichž vzdálenost je d = 4. Napiš rovnici této paraboly, urči její průsečík s osou x a vypočti obsah trojúhelníku, jehož vrcholy jsou průsečíky paraboly s osami.**

**ŘEŠENÍ:**




$P:(y-n)^2 = 2p(x-m)$

$P:(y+1)^2 = 2p(x+5)$

$Y_2[0;1] \in P \Rightarrow (1+1)^2 = 2p(0+5) \Rightarrow 2p = \frac{4}{5}$

a) $P:(y+1)^2 = \frac{4}{5}(x+5)$

b) $y = 0 \Rightarrow x = -\frac{15}{4} \Rightarrow X\left[-\frac{15}{4};0\right]$

c) $S = \frac{z \cdot v}{2} = \frac{4 \cdot \frac{15}{4}}{2} = \frac{15}{2}$ j$^2$

Důležitý je správný obrázek. Z něho vyčteme souřadnice průsečíků paraboly s osou *y*. Ty jsou důležité. Po jejich dosazení do rovnice paraboly získáme hodnotu parametru *p*.

### *37.5. Najdi souřadnice průsečíků paraboly $P:(y+5)^2=\frac{4}{5}(x+5)$ a kružnice $k:(x-2)^2+(y+5)^2=8$.*

**ŘEŠENÍ:**

$$(y+5)^2=\frac{4}{5}(x+5)$$

$$\underline{(x-2)^2+(y+5)^2=8}$$

$$(x-2)^2+\frac{4}{5}(x+5)=8$$

$$5x^2-16x=0$$

$$x(5x-16)\Rightarrow x_1=0;x_2=\frac{16}{5}$$

$$x_1=0\Rightarrow y^2+10y+21=0\Rightarrow y_1=-7,y_2=-3\Rightarrow P_1[0;-7],P_2[0;-3]$$

$$x_2=\frac{16}{5}\Rightarrow 25y^2+250y+461=0\Rightarrow y_3=-5-\frac{2}{5}\sqrt{41},y_4=-5+\frac{2}{5}\sqrt{41}$$

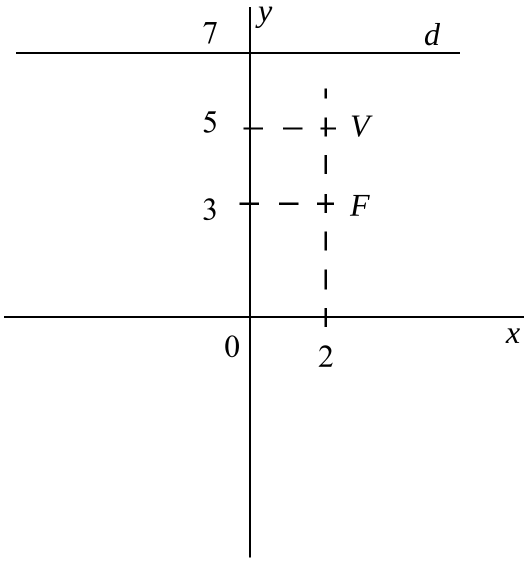
$$\Rightarrow P_3\left[\frac{16}{5};-5-\frac{2}{5}\sqrt{41}\right],P_4\left[\frac{16}{5};-5+\frac{2}{5}\sqrt{41}\right]$$

Opět sestavíme soustavu dvou, tentokrát kvadratických, rovnic. Využijeme, že obě obsahují člen $(y+5)^2$. Z jedné rovnice ho vyjádříme a do druhé dosadíme. Opakovaně vyřešíme kvadratickou rovnici a získáme celkem 4 průsečíky.

## Další příklady (již jen pouhé řešení bez vysvětlujících poznámek)

### 37.6. Napiš rovnici paraboly, znáš-li souřadnice ohniska $F[2;3]$ a rovnici řídící přímky $d: y = 7$.

K vyřešení problému nám pomůže přibližný náčrtek.




Známe-li umístění $F$ a $d$, určíme souřadnice vrcholu $V$ a hodnotu parametru paraboly $p$.

$F[2,3] \Rightarrow V[2,5]$

$p$ je vzdálenost $F$ a $d$ $\Rightarrow p = 4$

Použijeme správný tvar rovnice paraboly.

$$P: (x - v_1)^2 = -2p(y - v_2)$$

$$(x-2)^2 = -8(y-5)$$

### 37.7. Najdi průsečíky paraboly $P: x^2 - 2x - 2y - 1 = 0$ a přímky $p: x = 4 - t, y = 5 - 2t$.

Sestavíme soustavu rovnic. Do rovnice paraboly dosadíme parametrická vyjádření souřadnice $x$ a souřadnice $y$.

$$x = 4 - t$$

$$y = 5 - 2t$$

$$\underline{x^2 - 2x - 2y - 1 = 0}$$

$$(4-t)^2 - 2(4-t) - 2(5-2t) - 1 = 0$$

$$16 - 8t + t^2 - 8 + 2t - 10 + 4t - 1 = 0$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$$

Z kvadratické rovnice nám vyjdou dvě hodnoty parametru, což vede ke dvěma bodům (dvěma průsečíkům)

a) $x = 5, y = 7 \Rightarrow P_1[5,7]$

b) $x = 1, y = -1 \Rightarrow P_2[1,-1]$

### 37.8. Urči rovnice všech parabol, které procházejí body $K[6;0], L[-2;4]$, osu mají rovnoběžnou s osou x a hodnotu parametru p = 2.

Máme dvě možnosti:

a) $P:(y-v_2)^2 = 2p(x-v_1)$

b) $P:(y-v_2)^2 = -2p(x-v_1)$

Dosadíme oba body do vybrané rovnice.

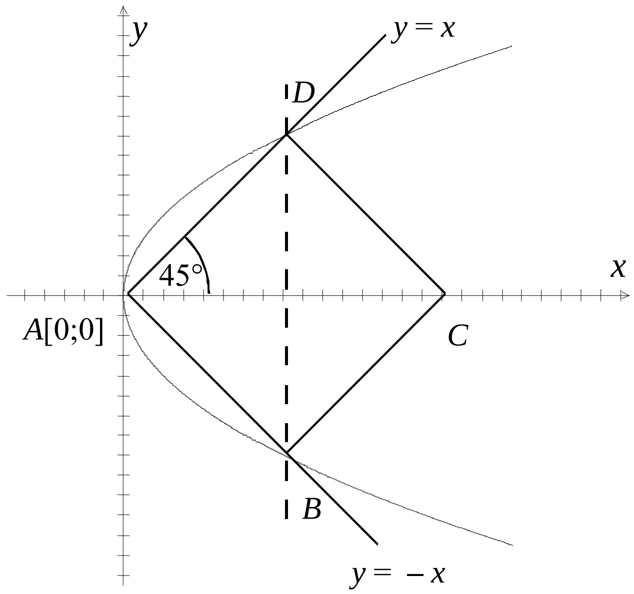
a)

$$K \in P \Rightarrow (-v_2)^2 = 4(6-v_1)$$
$$L \in P \Rightarrow (4-v_2)^2 = 4(-2-v_1)$$
$$v_2^2 = 24-4v_1 \quad (1)$$
$$16-8v_2+v_2^2 = -8-4v_1 \quad (2)$$
$$(2)-(1) \quad 16-8v_2 = -32$$
$$-8v_2 = -48$$
$$v_2 = 6$$
$$v_1 = -3$$
$$P:(y-6)^2 = 4(x+3)$$

b)

$$K \in P \Rightarrow v_2^2 = -4(6-v_1)$$
$$L \in P \Rightarrow (4-v_2)^2 = -4(-2-v_1)$$
$$v_2^2 = -24+4v_1 \quad (1)$$
$$16-8v_2+v_2^2 = 8+4v_1 \quad (2)$$
$$(2)-(1) \quad 16-8v_2 = 32$$
$$-8v_2 = 16$$
$$v_2 = -2$$
$$v_1 = 7$$
$$P:(y+2)^2 = -4(x-7)$$

### 37.9. Tři vrcholy čtverce ABCD leží na parabole $P: y^2 = 8x$ a to tak, že vrchol A splývá s vrcholem paraboly a vrchol C leží na ose x. Určete souřadnice vrcholů čtverce.




Bod $B$ je průsečík paraboly a přímky $y = -x$ (osy 2. a 4. kvadrantu)

$$y = -x$$
$$y^2 = 8x$$
$$x^2 - 8x = 0 \quad x(x-8) = 0 \qquad x_1 = 0;\ x_2 = 8$$
$$B[8,-8],\ D[8,8],\ C[16,0]$$

Bod $C$ má $x$-ovou souřadnici $2 \cdot 8$

$A[0;0]$, $B[8;-8]$, $C[16;0]$, $D[8;8]$

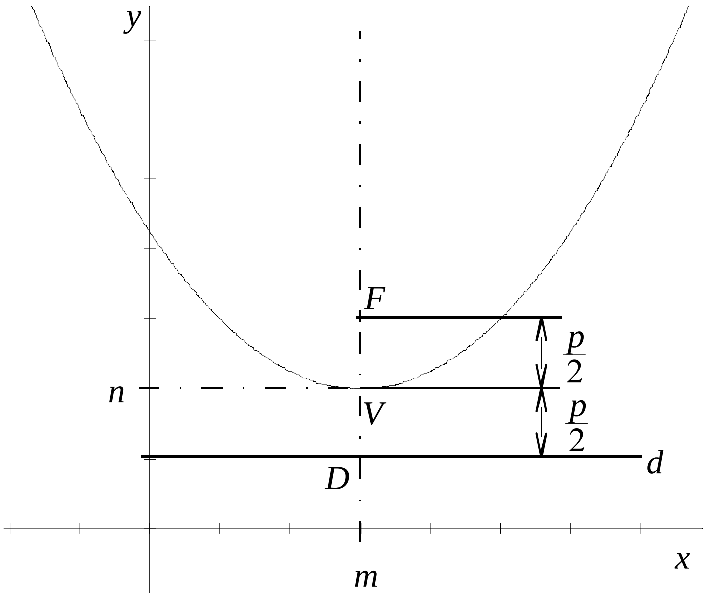
# PARABOLA V ANALYTICKÉ GEOMETRII
# TEORETICKÁ ČÁST

*Otázky, které mohou padnout při maturitní zkoušce:*

**1) Uveď různé definice paraboly v analytické geometrii.**
**2) Jak se liší zápis paraboly pro případ, kdy je hlavní osa rovnoběžná s $x$ a s $y$?**
**3) Jaká funkce má grafem parabolu a jaký je vztah mezi vyjádřením této funkce a rovnicí paraboly?**
**4) Jak se mění tvar paraboly v závislosti na poloze ohniska a řídící přímky?**
**5) Uveď příklady, kdy se parabola objevuje ve výuce fyziky.**

## 1. Uveď různé definice paraboly v analytické geometrii.

a) Parabolou nazýváme množinu všech bodů $X$ roviny, které mají stejnou vzdálenost od bodu $F$ a od přímky $d$ (přímku $d$ nazýváme řídicí přímkou, bod $F$ nazýváme ohnisko, vzdálenost řídicí přímky a ohniska označujeme $p$, $p$ nazýváme parametrem paraboly).



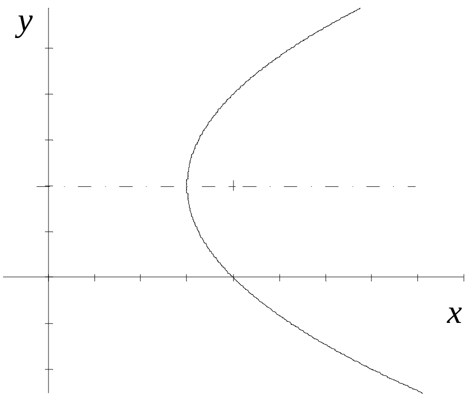

b) Parabola jako každá kuželosečka vzniká průnikem roviny s pláštěm rotačního kužele. Rovina řezu přitom svírá s osou kužele úhel rovný polovině vrcholového úhlu kužele.

## 2. Jak se liší zápis paraboly pro případ, kdy je hlavní osa rovnoběžná s *x* a s *y*?

V rovnicích paraboly jsou $m$ a $n$ souřadnice vrcholu, $p$ je parametr paraboly, $p \neq 0$.

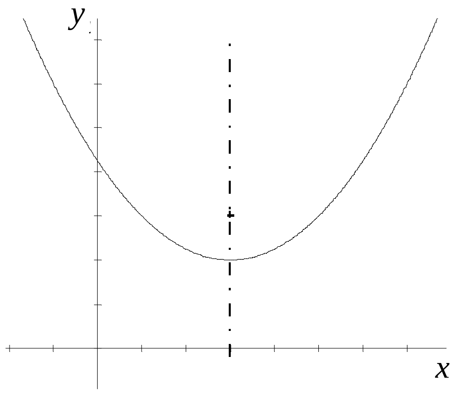
a) je-li hlavní osa paraboly rovnoběžná s osou $x$, platí pro parabolu rovnice:

$P:(y-n)^2 = 2p(x-m)$




b) je-li hlavní osa paraboly rovnoběžná s osou $y$, platí pro parabolu rovnice:

$P:(x-m)^2 = 2p(y-n)$




**Poznámka:** Uvedené zápisy vychází z významu $p$ jako parametru a připouští kladné i záporné hodnoty pro $p$. Při kladné hodnotě $p$ je parabola „otevřená do kladného nekonečna“, při záporné hodnotě $p$ je otevřena do záporného nekonečna.

V některých učebnicích a u některých vyučujících je parametr $p$ chápán přísně ve smyslu vzdálenosti (tzn. jedná se vždy o číslo větší než nula). Potom odlišujeme 4 možnosti zápisu paraboly:

$P:(y-n)^2 = 2p(x-m)$ nebo $P:(y-n)^2 = -2p(x-m)$

$P:(x-m)^2 = 2p(y-n)$ nebo $P:(x-m)^2 = -2p(y-n)$

## 3. Jaká funkce má grafem parabolu a jaký je vztah mezi vyjádřením této funkce a rovnicí paraboly?

Parabola je grafem kvadratické funkce. Ta je definována vztahem $y = ax^2 + bx + c$.
Toto vyjádření kvadratické funkce koresponduje s rovnicí paraboly
$P: x^2 + Ax + By + C = 0,$ kde $A \neq 0, A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$.

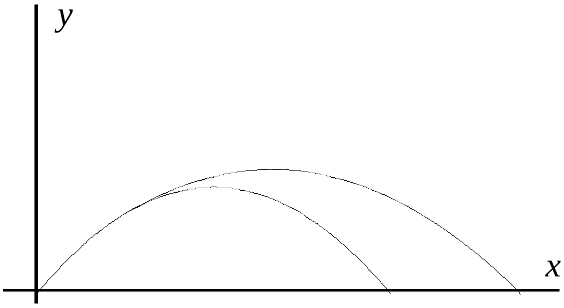
## 4. Jak se mění tvar paraboly v závislosti na poloze ohniska a řídicí přímky?

Parabolu můžeme popsat jako kuželosečku s výstředností (excentricitou) rovnou jedné. Všimněme si, že jako jediná kuželosečka nemá žádný vztah pro výpočet excentricity. Všechny paraboly si jsou navzájem podobné (matematicky), vzájemná poloha ohniska a řídicí přímky tvar paraboly nijak neovlivňuje.

Parabolu můžeme také chápat jako speciální případ elipsy, kdy jedno ohnisko necháme pevně umístěné v soustavě souřadnic a druhé posouváme limitně do nekonečna.

## 5. Uveď příklady, kdy se parabola objevuje ve výuce fyziky.

- S parabolou se setkáme při výuce u šikmého vrhu. Vrhneme-li těleso v ostrém úhlu od vodorovné roviny, pohybuje se v ideálním prostředí po parabole, která ve skutečných podmínkách přechází na balistickou křivku.




- Je-li tělesu udělena rychlost rovna 2. kosmické (tzv. parabolické či únikové), těleso se pohybuje po parabole a „uniká“ z gravitačního pole Země.