29. OBJEMY A POVRCHY TĚLES

29.1. Vypočítejte povrch kvádru ABCDEFGH, jestliže

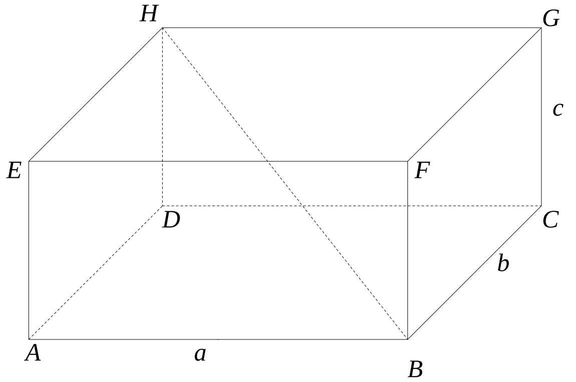
a) $|AB| = a,\ |BC| = b,\ |BH| = u$

b) $|AB| = a,\ |BH| = u,$ odchylka AG a EH je φ

ŘEŠENÍ:

Povrch kvádru určíme podle vzorce:

$S = 2\cdot(ab + ac + bc)$



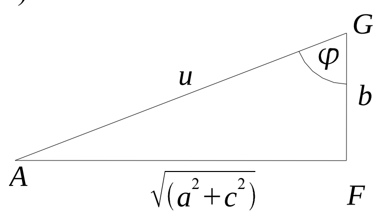
V úloze a) musíme vyjádřit pomocí tělesové úhlopříčky u velikost hrany c a dosadíme do vzorce.

a) $u^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = u^2 - a^2 - b^2$

$S = 2ab + 2bc + 2ac = 2ab + 2(a+b)\sqrt{u^2 - a^2 - b^2}$

b)

V úloze b) je zadána pouze délka hrany a a zbylé délky hran musíme vyjádřit pomocí tělesové úhlopříčky u a odchylky φ. Odchylka φ je zadána jako odchylka mezi AG a EH, stejná odchylka je mezi AG a FG, jelikož EH je rovnoběžná s FG.



$b = u\cdot\cos\varphi$

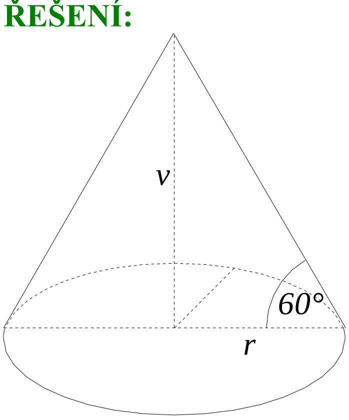
$c = \sqrt{u^2 - a^2 - b^2} = \sqrt{u^2 - a^2 - u^2\cos^2\varphi}$

$= \sqrt{u^2(1-\cos^2\varphi) - a^2} = \sqrt{u^2\sin^2\varphi - a^2}$

$S = 2\left(au\cos\varphi + u\cos\varphi\sqrt{u^2\sin^2\varphi - a^2} + a\sqrt{u^2\sin^2\varphi - a^2}\right)$

29.2. Objem kužele je $9\pi\sqrt{3}$ dm^3 a odchylka strany kužele od roviny podstavy je $\alpha = 60^\circ$. Určete obsah pláště kužele.

ŘEŠENÍ:



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$$

$$v = r \cdot \mathrm{tg}\ 60^\circ = r\sqrt{3}$$

$$V = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3 = 9\pi\sqrt{3} \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3 \text{ dm} \Rightarrow v = 3\sqrt{3} \text{ dm}$$

Poloměr kruhové výseče (pláště): $\rho = \sqrt{r^2 + v^2} = 6$ dm

Obvod kružnice o poloměru 6 dm: $o_1 = 2\pi\rho = 12\pi$ dm

Obvod kruhového oblouku (pláště): $o_2 = 2\pi r = 6\pi$ dm

Plášť kužele je přesným půlkruhem: $S = \frac{1}{2}\pi\rho^2 = 18\pi \ \text{dm}^2$

Vzorec pro výpočet kužele je $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$.

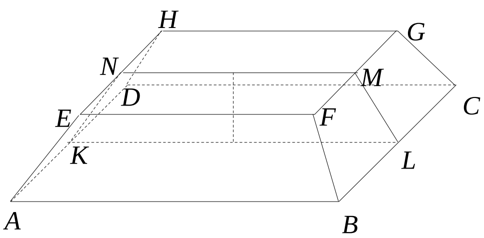
Pomocí odchylky si vyjádříme výšku v a dosadíme. Máme tak vyjádřený objem pouze v závislosti na poloměru a ten snadno vypočteme dosazením objemu ze zadání.

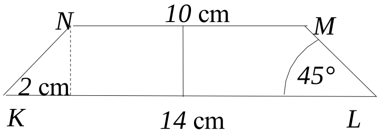
Plášť je část kruhu o poloměru $\sqrt{r^2 + v^2} = \sqrt{36} = 6$ dm.

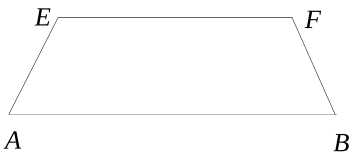
Obsah celého kruhu je 36π dm^2 a jeho obvod je 12π dm. Ale oblouk pláště má délku $2\pi r = 6\pi$ dm, což je přesně polovina celého kruhu. Obsah pláště je tedy 18π dm^2.

29.3. Pravidelný komolý čtyřboký jehlan má hrany podstav dlouhé 14 cm, 10 cm. Boční stěny mají sklon 45°. Vypočítejte povrch tělesa.

ŘEŠENÍ:







$$|LM| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

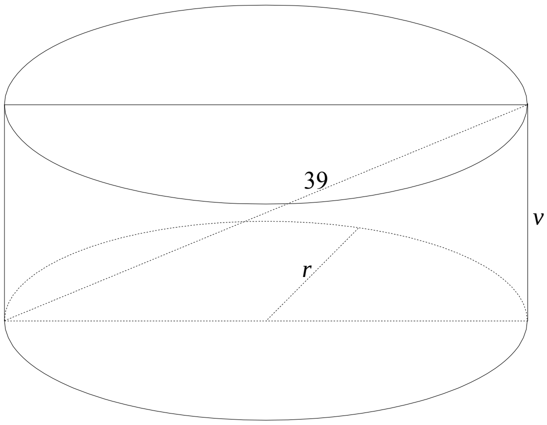
$$S = 14^2 + 10^2 + 4 \cdot \left(\frac{14+10}{2} \cdot 2\sqrt{2}\right) \doteq 431{,}76 \text{ cm}^2$$

Těleso se skládá ze dvou čtverců (podstavy) a čtyř lichoběžníků (boční stěny). Jedna boční stěna je lichoběžník $ABFE$. Abychom mohli vypočítat obsah bočního lichoběžníku, musíme znát jeho výšku. Řešíme lichoběžník $KLMN$. Rameno svírá se základnou úhel 45° a úsek pod ramenem měří 2 cm. Stejná délka přísluší výšce tělesa. Délku úsečky LM vypočteme Pythagorovou větou.

Celkový povrch tvoří 2 čtverce (větší a menší) a 4 shodné lichoběžníky.

29.4. Poměr pláště rotačního válce k obsahu jeho podstavy je 5 : 3. Určete jeho objem, má-li úhlopříčka osového řezu délku 39 cm.

ŘEŠENÍ:



$$\frac{2\pi rv}{\pi r^2}=\frac{5}{3}\Rightarrow 6v=5r\Rightarrow v=\frac{5}{6}r$$

$$\sqrt{(2r)^2+v^2}=39$$

$$\sqrt{4r^2+\frac{25}{36}r^2}=39$$

$$\sqrt{\frac{169}{36}r^2}=39\Rightarrow r=18\text{ cm}, v=15\text{ cm}$$

$$V=\pi r^2 v=4860\pi\text{ cm}^3$$

Z poměru pláště a podstavy vyjádříme vztah mezi výškou *v* a poloměrem *r*.

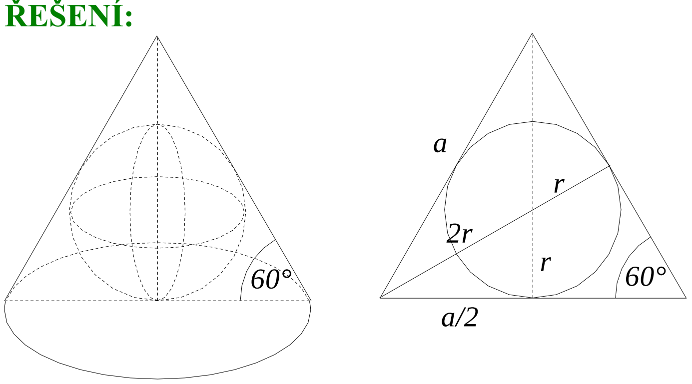
Dále vyjádříme pomocí Pythagorovy věty úhlopříčku řezu.

Dosazením za *v* dostaneme rovnici pro poloměr *r*.

Vypočtené hodnoty poloměru a výšky dosadíme do vzorce pro objem válce.

29.5. Do kužele, jehož strana svírá s rovinou podstavy úhel 60°, je vepsaná koule s objemem $V = 4\text{ cm}^3$. Určete objem kužele.

ŘEŠENÍ:



$$\frac{4}{3}\pi r^3=4\Rightarrow r^3=\frac{3}{\pi}$$

$$\frac{a}{2}=\sqrt{(2r)^2-r^2}=r\sqrt{3}\wedge v=3r$$

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot v=\frac{1}{3}\pi\cdot 3r^2\cdot 3r=3\pi r^3=9\text{ cm}^3$$

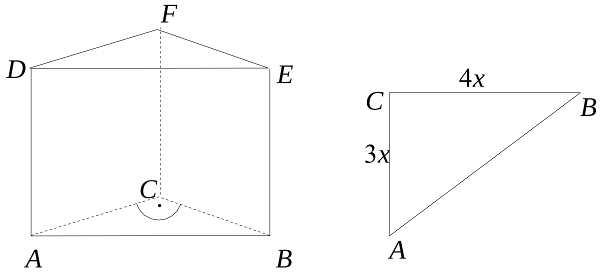
Osový řez tohoto kužele je rovnostranný trojúhelník a řez koule je kružnice.

Střed kružnice (koule) leží v těžišti tohoto trojúhelníku.

Těžiště dělí příslušnou těžnici v poměru 1 : 2. V rovnostranném trojúhelníku se shoduje těžnice s výškou. Tzn. že je kolmá na stranu.

29.6. Podstavou kolmého hranolu je pravoúhlý trojúhelník, jeho odvěsny jsou v poměru 3 : 4. Výška hranolu je o 2 cm menší než delší odvěsna podstavy. Určete objem hranolu, je-li jeho povrch 468 cm².

ŘEŠENÍ:



$a = 4x, b = 3x, c = \sqrt{(3x)^2 + (4x)^2} = 5x$

$v_h = 4x - 2$

$S = 2S_p + S_{pl} = 2\frac{3x \cdot 4x}{2} + 12x \cdot (4x - 2) = 60x^2 - 24x = 468$

$60x^2 - 24x - 468 = 0$

$5x^2 - 2x - 39 = 0 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -2,6$ ... nelze

$a = 12$ cm, $b = 9$ cm, $c = 15$ cm, $v_h = 10$ cm

$V = \frac{a \cdot b}{2} \cdot v_h = 540 \text{ cm}^3$

Odvěsny si vyjádříme pomocí poměru a neznámé *x*. Pythagorovou větou dopočteme přeponu. Vyjádříme povrch hranolu v závislosti na *x* a ze známé hodnoty povrchu určíme hodnotu *x*.

Známe všechny strany v podstavě i výšku hranolu. Dosazením do vzorce pro výpočet objemu hranolu výpočet dokončíme.

OBJEMY A POVRCHY TĚLES
TEORETICKÁ ČÁST

Otázky, které mohou padnout při maturitní zkoušce:

1) **Definuj geometrická tělesa: krychle, kvádr, hranol, válec, kužel, jehlan, komolý kužel, komolý jehlan, koule.**
2) **Které těleso nazýváme rotační.**
3) **Vyjmenuj některá rotační tělesa.**
4) **Uveď vztahy pro výpočet objemů a povrchů pro tělesa z předchozí otázky.**
5) **Jaký je vztah mezi kuželem a elipsou, parabolou, hyperbolou, kružnicí?**
6) **Stručně vysvětli pojem povrch tělesa.**
7) **Stručně vysvětli pojem objem tělesa.**
8) **Vysvětli aspoň přibližně Cavalieriho princip.**

1. Definuj geometrická tělesa: hranol, kvádr, krychle, válec, kužel, jehlan, komolý kužel, komolý jehlan, koule.

Geometrické těleso je prostorově omezený geometrický útvar, jehož hranicí (povrchem) je uzavřená plocha.

Hranolová plocha
Je dán *n*-úhelník $A_1A_2...A_1$ (označovaný jako řídící mnohoúhelník) ležící v rovině ρ a přímka *s* různoběžná s rovinou ρ. **Hranolová plocha** je sjednocení všech přímek, které jsou rovnoběžné s přímkou *s* a protínají obvod mnohoúhelníku $A_1A_2...A_1$.

Hranolový prostor je sjednocení všech přímek, které jsou rovnoběžné s přímkou *s* a protínají řídící mnohoúhelník (na obvodě nebo uvnitř).

Hranol je těleso omezené hranolovou plochou a dvěma různými navzájem rovnoběžnými rovinami, které jsou různoběžné se směrem hranolové plochy.
Jinak řečeno, je to část hranolového prostoru ohraničená dvěma rovnoběžnými rovinami, které protínají jeho směr.

Mnohoúhelníky, které jsou průnikem hranolového prostoru a rovnoběžných rovin, nazýváme **podstavy hranolu**, jejich strany nazýváme **podstavné hrany**, jejich vrcholy nazýváme **vrcholy hranolu**. Úsečky hranolové plochy, které prochází vrcholy podstav, nazýváme boční hrany. Rovnoběžníky hranolové plochy, z nichž každý tvoří dva vrcholy jedné podstavy a dva vrcholy druhé podstavy, nazýváme **boční stěny**. **Povrch** hranolu tvoří podstavy a boční stěny. **Plášť** hranolu je sjednocení všech bočních stěn. **Výška** hranolu je vzdálenost jeho podstav. Tělesová úhlopříčka je spojnice dvou vrcholů, které neleží v téže stěně. Úhlopříčky stěn nazýváme **stěnové úhlopříčky**.

Kolmý hranol má kolmé boční stěny k podstavám.

Pravidelný hranol je kolmý hranol, jehož podstavou je pravidelný mnohoúhelník.

Krychle je kolmý čtyřboký hranol, jehož všechny hrany jsou shodné. Její povrch se skládá ze šesti shodných čtverců. Má čtyři shodné tělesové úhlopříčky, které se protínají ve společném bodě a tímto bodem jsou půleny. Tento bod se nazývá střed krychle. Krychle má osm vrcholů a dvanáct hran.

Výpočet stěnové úhlopříčky krychle: $u = \sqrt{2}a$
Výpočet tělesové úhlopříčky krychle: $u_T = \sqrt{3}a$

Kvádr je kolmý čtyřboký hranol, jehož podstavou je obdélník nebo čtverec. Jeho povrch se skládá ze šesti pravoúhelníků, z nichž každé dva protější jsou rovnoběžné a shodné. Má čtyři shodné tělesové úhlopříčky, které se protínají ve společném bodě a tímto bodem jsou půleny. Tento bod se nazývá střed kvádru. Kvádr má osm vrcholů a dvanáct hran. Hrany označujeme většinou *a*, *b* a *c*.

Výpočet stěnové úhlopříčky kvádru: $u = \sqrt{a^2 + b^2}$
Výpočet tělesové úhlopříčky kvádru: $u_T = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Kruhová válcová plocha
Je dána kružnice *k* ležící v rovině ρ a přímka *s* různoběžná s rovinou ρ. **Kruhová válcová plocha** je sjednocení všech přímek, které jsou rovnoběžné s přímkou *s* a protínají obvod kružnice *k*.

Kruhový válcový prostor je sjednocení všech přímek, které jsou rovnoběžné s přímkou *s* a protínají kruh ohraničený kružnicí *k*.

Kruhový válec je těleso omezené kruhovou válcovou plochou a dvěma různými navzájem rovnoběžnými rovinami, které jsou různoběžné se směrem kruhové válcové plochy.

Oba kruhy, v nichž kruhový válcový prostor protíná rovnoběžné roviny, se nazývají **podstavy**, úsečky kruhové válcové plochy, které prochází kružnicí ohraničující podstavu, se nazývají **strany válce**, množina stran válce vyplňuje **plášť válce**. **Povrch válce** se skládá ze dvou kruhových podstav a pláště. **Výška** je dána vzdáleností podstav.

Rotační válec je takový kruhový válec, jehož strany jsou kolmé k podstavám. Spojnice středů podstav je také kolmá k podstavám a nazývá se osa válce.
Kosý válec nemá strany kolmé k podstavě.

Rovnostranný válec má výšku stejně dlouhou jako průměr podstavy.

Rotační válec můžeme také definovat jako rotační těleso. Vznikne rotací obdélníku nebo čtverce kolem přímky, která obsahuje jednu jeho stranu.

Jehlanová plocha
Je dán *n*-úhelník $A_1A_2...A_1$ (označovaný jako řídící mnohoúhelník) ležící v rovině ρ a bod *V* (vrchol) ležící mimo rovinu ρ. **Jehlanová plocha** je sjednocení všech přímek, které procházejí bodem *V* a protínají obvod mnohoúhelníku $A_1A_2...A_1$.

Hrana jehlanové plochy je její přímka, která prochází vrcholem řídícího mnohoúhelníka.

Jehlanový prostor je sjednocení všech přímek, které procházejí bodem *V* a protínají řídící mnohoúhelník (na obvodě nebo uvnitř).

Jehlan je těleso omezené jehlanovou plochou a rovinou, která je různoběžné s hranami jehlanové plochy.

Mnohoúhelník, který je průnikem jehlanového prostoru a ohraničující roviny, nazýváme **podstava jehlanu**. Strany podstavy nazýváme **podstavné hrany**, vrcholy podstavy a vrchol *V* nazýváme **vrcholy jehlanu**, přičemž vrchol *V* je **hlavní vrchol**. Úsečky jehlanové plochy, které prochází vrcholy podstav a hlavním vrcholem, nazýváme boční hrany. Trojúhelníky, které tvoří dva sousední vrcholy podstavy a hlavní vrchol, nazýváme **boční stěny**. **Povrch** jehlanu tvoří podstava a boční stěny. **Plášť** jehlanu je sjednocení všech bočních stěn. **Výška** jehlanu je vzdálenost hlavního vrcholu od roviny podstavy.

Pravidelný jehlan má podstavu pravidelný mnohoúhelník (rovnostranný trojúhelník, čtverec, pravidelný pětiúhelník atd.). Jeho boční stěna jsou shodné rovnoramenné trojúhelníky, které svírají s podstavou shodné úhly a každé dvě boční stěny svírají také shodné úhly. Jeho boční hrany jsou shodné a svírají s podstavou znovu shodné úhly. Pata výšky dopadá do středu podstavy.

Čtyřstěn je trojboký jehlan.

Pravidelný čtyřstěn je pravidelný trojboký jehlan. Všechny čtyři stěny jsou shodné rovnostranné trojúhelníky.

Komolý jehlan vznikne rozdělením původního jehlanu rovinou rovnoběžnou s podstavou. Rozdělením vznikne z jehlanu menší jehlan a těleso, které nazýváme komolý jehlan. Jeho podstavami jsou podobné mnohoúhelníky, bočními stěnami jsou lichoběžníky.

Pravidelný komolý jehlan má boční stěny shodné rovnoramenné lichoběžníky.

Kruhová kuželová plocha
Je dána kružnice *k* ležící v rovině ρ a bod *V*, který v rovině ρ neleží. **Kruhová kuželová plocha** je sjednocení všech přímek, které procházejí bodem *V* a protínají obvod kružnice *k*.

Kruhový kuželový prostor je sjednocení všech přímek, které procházejí bodem *V* a protínají kruh ohraničený kružnicí *k*.

Kruhový kužel je těleso omezené kruhovou kuželovou plochou a rovinou, která je různoběžná s přímkami kuželové válcové plochy a neprochází bodem *V*.

Kruh, v němž kruhový kuželový prostor protíná rovinu, se nazývá **podstava**, úsečky kruhové kuželové plochy, které prochází kružnicí ohraničující podstavu, se nazývají **strany kužele**, množina stran kužele vyplňuje **plášť kužele**. **Povrch kužele** se skládá z jedné kruhové podstavy a pláště. **Výška** je dána vzdáleností podstavy a vrcholu.

Rotační kužel je takový kruhový kužel, u něhož pata výšky je zároveň středem podstavy. Spojnice středu podstavy a vrcholu (výška) je kolmá k podstavě a nazývá se osa kužele.

Kosý kužel nemá výšku kolmou k podstavě.

Rovnostranný kužel má délku strany shodnou s průměrem podstavy.

Rotační kužel můžeme také definovat jako rotační těleso. Vznikne rotací pravoúhlého trojúhelníku kolem přímky, která obsahuje jednu jeho odvěsnu.

Komolý kužel vznikne rozdělením původního kužele rovinou rovnoběžnou s podstavou. Rozdělením vznikne z kužele menší kužel a těleso, které nazýváme komolý kužel. Jeho podstavami jsou kruhy, jeho osovým řezem je lichoběžník (u rotačního kužele se jedná o rovnoramenný lichoběžník).

Kulová plocha je množina bodů v prostoru, které mají od bodu S (středu kulové plochy) stejnou vzdálenost r (poloměr kulové plochy, $r > 0$).

Koule je množina bodů v prostoru, které mají od bodu S (středu koule) vzdálenost menší nebo rovnu r (poloměr koule, $r > 0$).

Části kulové plochy a koule
Kulový vrchlík vznikne rozdělením kulové plochy sečnou rovinou (to je rovina, která má s kulovou plochou společnou kružnici). Sečná rovina rozdělí kulovou plochu na dva kulové vrchlíky. Kulový vrchlík je plocha, počítáme ho v jednotkách čtverečných.

Kulová úseč vznikne rozdělením koule sečnou rovinou (to je rovina, která má s koulí společný kruh). Sečná rovina rozdělí kouli na dvě kulové úseče.
Kulový pás je část kulové plochy mezi dvěma rovnoběžnými řezy.
Kulová vrstva je část koule mezi dvěma rovnoběžnými řezy.
Kulová výseč je část koule ohraničená kulovým vrchlíkem a pláštěm kužele, jehož vrchol je ve středu koule a obvod podstavy je totožný s hraniční kružnicí vrchlíku.
Poznámka: Vrchlík a pás jsou plochy, úseč, vrstva, výseč jsou tělesa (počítáme objem)

2. Které těleso nazýváme rotační.

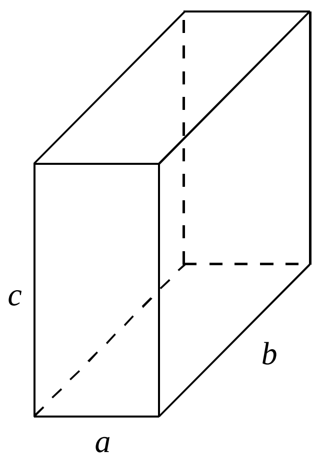
Rotační těleso získáme rotací rovinného obrazce kolem dané přímky, osy rotačního tělesa

3. Vyjmenuj některá rotační tělesa.

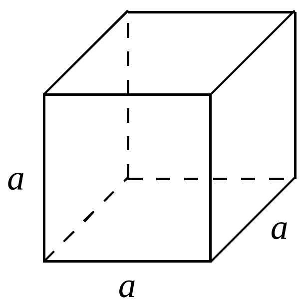
Rotační válec, rotační kužel, komolý rotační kužel, koule (případně elipsoid zploštělý - rotuje kolem své vedlejší osy, elipsoid vejčitý - rotuje kolem své hlavní osy)

4. Uveď vztahy pro výpočet objemů a povrchů pro tělesa z předchozí otázky.

Kvádr
Povrch kvádru: $S = 2(ab + ac + bc)$
Objem kvádru: $V = abc$
a, b, c jsou délky hran kvádru



Krychle
Povrch krychle: $S = 6a^2$
Objem krychle: $V = a^3$
a je délka hrany krychle

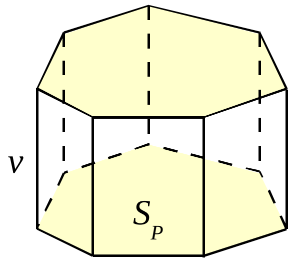


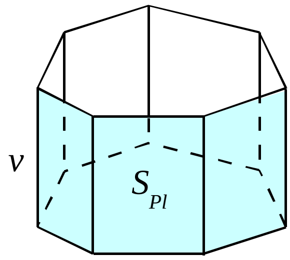
Hranol

Povrch hranolu: $S = 2S_p + S_{pl}$

Objem hranolu: $V = S_p v$

S_p je obsah podstavy, S_{pl} je obsah pláště,
v je výška hranolu



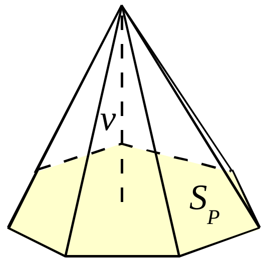


Jehlan

Povrch jehlanu: $S = S_p + S_{pl}$

Objem jehlanu: $V = \frac{1}{3} S_p v$

S_p je obsah podstavy, S_{pl} je obsah pláště, v je výška jehlanu

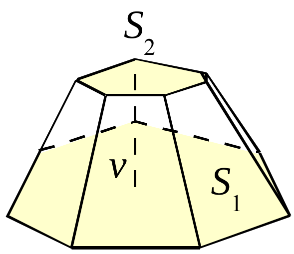


Komolý jehlan

Povrch komolého jehlanu: $S = S_{p1} + S_{p2} + S_{pl}$

Objem komolého jehlanu: $V = \frac{1}{3} v \left(S_{p1} + \sqrt{S_{p1} S_{p2}} + S_{p2} \right)$

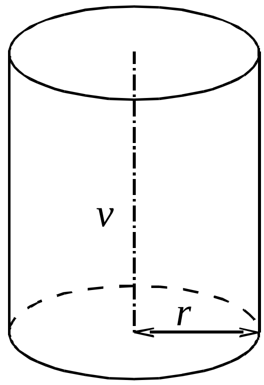
S_{p1}, S_{p2} jsou obsahy podstav, S_{pl} je obsah pláště,
v je výška komolého jehlanu



Rotační válec

Povrch rotačního válce: $S = 2\pi r (r + v) = 2\pi r^2 + 2\pi r v$

Objem rotačního válce: $V = \pi r^2 v$
r je poloměr podstavy válce, v je výška válce

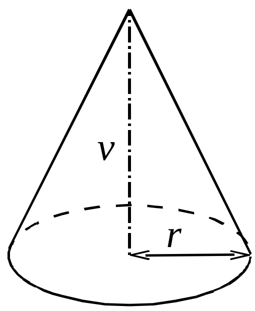


Rotační kužel

Povrch rotačního kužele: $S = \pi r (r + s) = \pi r^2 + \pi r s$

Objem rotačního kužele: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 v$

s je délka strany kužele, r je poloměr podstavy kužele,
v je výška kužele

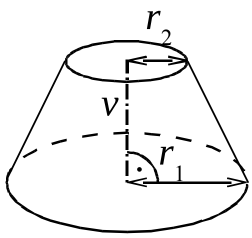


Komolý rotační kužel

Povrch rotačního kužele: $S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi s\left(r_1 + r_2\right)$

Objem rotačního kužele: $V = \frac{1}{3}\pi v\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)$

s je délka strany komolého kužele,
r_1, r_2 jsou poloměry podstav, *v* je výška komolého kužele

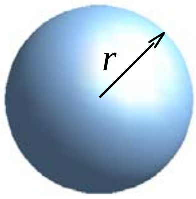


Koule

Povrch koule: $S = 4\pi r^2$

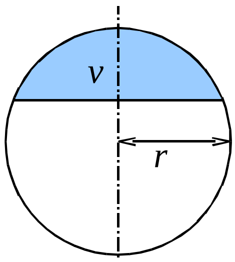
Objem koule: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

r je poloměr koule



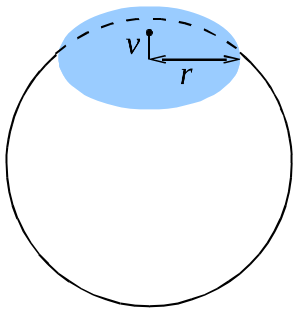
Části koule

Obsah kulového vrchlíku nebo kulového pásu: $S = 2\pi r v$
r je poloměr kulové plochy a *v* je výška vrchlíku (pásu)



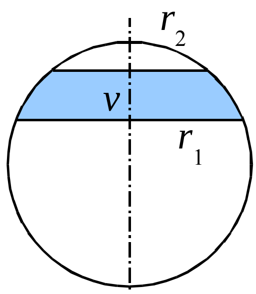
Objem kulové úseče: $V = \frac{\pi v}{6}\left(3r_1^2 + v^2\right)$

r je poloměr podstavy úseče a *v* je výška úseče



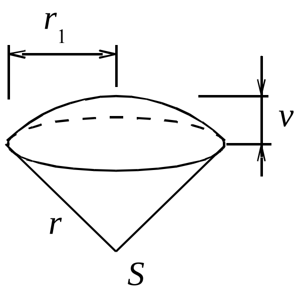
Objem kulové vrstvy: $V = \frac{\pi v}{6}\left(3r_1^2 + 3r_2^2 + v^2\right)$

r_1, r_2 jsou poloměry podstav vrstvy a *v* je výška vrstvy



Objem kulové výseče: $V = \frac{\pi v}{6}\left(3r_1^2 + v^2\right) + \frac{\pi r_1^2\left(r - v\right)}{3}$

Tento objem je součtem objemu kulové úseče a objemu rotačního kužele (součet výšek úseče a kužele je poloměr koule, které je výseč částí)
r_1 je poloměr podstavy úseče,
r je poloměr koule a *v* je výška úseče



5. Jaký je vztah mezi kuželem a elipsou, parabolou, hyperbolou, kružnicí?

Kružnice, elipsa, parabola a hyperbola jsou křivky, které nazýváme kuželosečky. Všechny vznikají řezem roviny kuželovou plochou.

6. Stručně vysvětli pojem povrch tělesa.

Povrchem S tělesa chápeme obsah jeho hranice.

7. Stručně vysvětli pojem objem tělesa.

Objem tělesa je kladné reálné číslo, které přiřazujeme každému tělesu. Pro objem platí:
a) Shodná tělesa mají stejný objem.
b) Pokud je těleso složeno z několika těles, které nepronikají skrz sebe, je jeho objem roven součtu objemů těchto těles.
c) Objem krychle, jejíž hrana má délku 1 (nazýváme ji jednotková krychle), je roven 1.

8. Vysvětli aspoň přibližně Cavalieriho princip.

Cavalieriho princip říká, že tělesa se shodnými obsahy podstav a shodnými výškami mají stejný objem, pokud mají řezy rovnoběžné s podstavami a vedené ve stejné vzdálenosti od podstav stejné obsahy.

Můžeme vzít sloupek stejných mincí, jednou z něj vytvoříme kolmý válec, jednou kosý válec. Jelikož je v obou případech obsah podstavy shodný, výška shodná a v jakémkoli řezu rovnoběžném s podstavou dostaneme shodný kruh, tak objemy obou válců se shodují.