17. EXPONENCIÁLNÍ ROVNICE

17.1. Řeš v R rovnice:

a) $2^{5x-3} = 128$ b) $3^{4x+1} = 1$ c) $17^{|3x-1|} = 0$ d) $2^{(x-1)^2-38} = 0,25$

ŘEŠENÍ:

a) $2^{5x-3} = 2^7$

$5x-3=7$

$x=2$

$K=\{2\}$

b) $3^{4x+1} = 3^0$

$4x+1=0$

$x=-\frac{1}{4}$

$K=\left\{-\frac{1}{4}\right\}$

c) $17^{|3x-1|} = 0$

$K=\varnothing$

d) $2^{(x-1)^2-38} = \frac{1}{4}$

$(x-1)^2-38=-2$

$x^2-2x-35=0$

$x_1=-5, x_2=7$

$K=\{-5;7\}$

Strategie: potřebujeme získat takový tvar rovnice, kdy je na obou stranách jen jedna mocnina a obě mocniny mají stejný základ. Potom musí platit rovnost exponentů: $a^s = a^t \Leftrightarrow s=t$

Klasické případy (záludnosti):
1. na pravé straně je jednička, jedná se o mocninu s exponentem nula
2. na pravé straně je nula nebo záporné číslo, rovnice nemá řešení, mocnina je vždy větší než nula.
3. na pravé straně je převrácená hodnota mocniny

17.2. Řeš v R rovnici: $3\cdot 4^{x+3} + 7\cdot 4^{x+2} - 22\cdot 4^{x+1} - 37\cdot 4^x = 358$

ŘEŠENÍ:

$3\cdot 4^{x+3} + 7\cdot 4^{x+2} - 22\cdot 4^{x+1} - 37\cdot 4^x = 358$

$3\cdot 4^3\cdot 4^x + 7\cdot 4^2\cdot 4^x - 22\cdot 4\cdot 4^x - 37\cdot 4^x = 358$

$192\cdot y + 112\cdot y - 88\cdot y - 37\cdot y = 358$

$179y = 358$

$y=2$

$4^x = 4^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$K=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

V tomto typu rovnic využíváme pravidlo pro počítání s mocninami: $a^{s+t} = a^s\cdot a^t$.

Místo mocniny 4^x zavedeme substituci $4^x = y$.

Nesmíme zapomenout „návrat do substituce“.

Pozor na závěr řešení. V mocnině může být i zlomek.

17.3. Řeš v R rovnici: $3^{2x+3}+9^{x+1}+27^{\frac{2x}{3}}=999$

ŘEŠENÍ:

$$3^{2x+3}+9^{x+1}+27^{\frac{2x}{3}}=999$$
$$3^3\cdot 3^{2x}+\left(3^2\right)^{x+1}+\left(3^3\right)^{\frac{2x}{3}}=999$$
$$3^3\cdot 3^{2x}+3^{2x+2}+3^{2x}=999$$
$$27y+9y+y=999$$
$$37y=999$$
$$y=27$$
$$3^{2x}=3^3\Rightarrow x=\frac{3}{2}$$
$$K=\left\{\frac{3}{2}\right\}$$

Postup z předešlého výpočtu doplníme využitím dalšího vztahu: $\left(a^s\right)^t=a^{s\cdot t}$.

Místo mocniny 3^{2x} zavedeme substituci $3^{2x}=y$.

17.4. Řeš v R rovnici: $2^{2x+2}-2^{x+5}+2^3=2^x$

ŘEŠENÍ:

$$2^{2x+2}-2^{x+5}+2^3=2^x$$
$$2^2\cdot\left(2^x\right)^2-2^5\cdot 2^x+8=2^x$$
$$4y^2-33y+8=0$$
$$y_{1,2}=\frac{33\pm 31}{8}\Rightarrow\quad y_1=\frac{1}{4};y_2=8$$
$$\text{a) } 2^x=\frac{1}{4}=2^{-2}\Rightarrow x=-2$$
$$\text{b) } 2^x=8=2^3\Rightarrow x=3$$
$$K=\{-2;3\}$$

Řešíme podobně jako v předchozí úloze, jen tentokrát dospějeme ke kvadratické rovnici.

Místo mocniny 2^x zavedeme substituci $2^x=y$.

17.5. Řeš v R rovnici: $4^{x+2}+17\cdot 3^x=3^{x+4}-11\cdot 4^x$

ŘEŠENÍ:

$$4^{x+2}+11\cdot 4^x=3^{x+4}-17\cdot 3^x$$
$$16\cdot 4^x+11\cdot 4^x=81\cdot 3^x-17\cdot 3^x$$
$$27\cdot 4^x=64\cdot 3^x$$
$$\frac{4^x}{3^x}=\frac{64}{27}$$
$$\left(\frac{4}{3}\right)^x=\left(\frac{4}{3}\right)^3$$
$$x=3$$
$$K=\{3\}$$

V zadané rovnici máme sice mocniny se dvěma různými základy. Postupně však umíme vytvořit jen jednu mocninu s jedním základem ve tvaru zlomku.

17.6. Řeš v R rovnici: $x^x + 13 \cdot x^{-x} = 14\left(2 - x^{-x}\right)$

ŘEŠENÍ:

$$x^x + 13 \cdot x^{-x} = 14\left(2 - x^{-x}\right)$$
$$x^x + 13 \cdot x^{-x} = 28 - 14 \cdot x^{-x}$$
$$x^x + 27 \cdot x^{-x} - 28 = 0$$
$$y - 28 + \frac{27}{y} = 0$$
$$y^2 - 28y + 27 = 0$$
$$y_{1,2} = \frac{28 \pm 26}{2} \Rightarrow y_1 = 1; y_2 = 27$$
$$\text{a) } x^x = 1 \Rightarrow x = 1$$
$$\text{b) } x^x = 27 \Rightarrow x = 3$$
$$K = \{1; 3\}$$

Rovnice vypadá zapeklitě, ale řešení nakonec není tak nepoddajné.

Místo mocniny x^x zavedeme substituci $x^x = y$.

Závěrečné rovnice musíš vyřešit metodou „kouknu a vidím“.

17.7. Řeš v R rovnici: $5^{4x+1} + 3^{4x+1} - 8 \cdot 15^{2x} = 0$

ŘEŠENÍ:

$$5^{4x+1} + 3^{4x+1} - 8 \cdot 15^{2x} = 0$$
$$5 \cdot 5^{4x} + 3 \cdot 3^{4x} - 8 \cdot 3^{2x} \cdot 5^{2x} = 0$$
$$5 \cdot 5^{2x} \cdot 5^{2x} + 3 \cdot 3^{2x} \cdot 3^{2x} - 8 \cdot 3^{2x} \cdot 5^{2x} = 0 \quad / :3^{2x} \quad :5^{2x}$$
$$5 \cdot \frac{5^{2x}}{3^{2x}} + 3 \cdot \frac{3^{2x}}{5^{2x}} - 8 = 0$$
$$5 \cdot y + 3 \cdot \frac{1}{y} - 8 = 0$$
$$5y^2 - 8y + 3 = 0$$
$$y_{1,2} = \frac{8 \pm 2}{10} \Rightarrow y_1 = \frac{3}{5}; y_2 = 1$$
$$\text{a) } \left(\frac{5}{3}\right)^{2x} = \frac{3}{5} \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$
$$\text{b) } \left(\frac{5}{3}\right)^{2x} = 1 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$
$$K = \left\{-\frac{1}{2}; 0\right\}$$

Zpočátku to vypadá, že máme dvě mocniny s různými základy.

V řešení míříme k úpravám, které vytvoří mocniny se stejným základem $\left(\frac{5}{3}\right)^{2x}$.

Místo mocniny $\left(\frac{5}{3}\right)^{2x}$ zavedeme substituci $\left(\frac{5}{3}\right)^{2x} = y$. Po substituci se opět dostaneme ke kvadratické rovnici.

Další příklady (již jen pouhé řešení bez vysvětlujících poznámek)

17.8. Řeš v R rovnici: $8^{1+x} + 8^{1-x} = 65$

$$8^{1+x} + 8^{1-x} = 65$$

$$8 \cdot 8^x + \frac{8}{8^x} = 65$$

Substituce: $y = 8^x$

$$8y + \frac{8}{y} = 65 \qquad / \cdot y$$

$$8y^2 - 65y + 8 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{65 \pm 63}{16} = \begin{matrix} \nearrow \frac{1}{8} \\ \searrow 8 \end{matrix}$$

a) $y = \frac{1}{8}$

$$8^x = 8^{-1}$$

$$x = -1$$

b) $y = 8$

$$8^x = 8^1$$

$$x = 1$$

$$K = \{-1; 1\}$$

17.9. Řeš v R rovnici: $162 + 7\sqrt{3^{x-60}} = \sqrt{3^{x-56}}$

$$162 + 7\sqrt{3^{x-60}} = \sqrt{3^{x-56}}$$

$$162 + 7 \cdot 3^{\frac{x-60}{2}} = 3^{\frac{x-60+4}{2}}$$

$$162 + 7 \cdot 3^{\frac{x-60}{2}} = 3^2 \cdot 3^{\frac{x-60}{2}}$$

Substituce: $y = \frac{x-60}{2}$

$$162 + 7 \cdot 3^y = 9 \cdot 3^y$$

$$2 \cdot 3^y = 162$$

$$3^y = 81 = 3^4$$

$$y = 4$$

$$\frac{x-60}{2} = 4$$

$$x = 68$$

$$K = \{68\}$$

17.10. Řeš v R rovnici: $2 \cdot 3^{3+x} + 4 \cdot 3^x - 174 = 0$

$$2 \cdot 3^{3+x} + 4 \cdot 3^x - 174 = 0$$

$$2 \cdot 3^3 \cdot 3^x + 4 \cdot 3^x - 174 = 0$$

Substituce: $y = 3^x$

$$54y + 4y - 174 = 0$$

$$58y = 174$$

$$y = 3$$

$$3^x = 3^1 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

$$K = \{1\}$$

17.11. Řeš v R rovnici: $\sqrt{5^x} + \sqrt{5^{x+2}} + \sqrt{5^{x+4}} + \sqrt{5^{x+6}} = 6{,}24$

$$\sqrt{5^x} + \sqrt{5^{x+2}} + \sqrt{5^{x+4}} + \sqrt{5^{x+6}} = 6{,}24$$

$$5^{\frac{x}{2}} + 5^{\frac{x+2}{2}} + 5^{\frac{x+4}{2}} + 5^{\frac{x+6}{2}} = 6{,}24$$

$$5^{\frac{x}{2}} + 5 \cdot 5^{\frac{x}{2}} + 5^2 \cdot 5^{\frac{x}{2}} + 5^3 \cdot 5^{\frac{x}{2}} = \frac{624}{100}$$

$$156 \cdot 5^{\frac{x}{2}} = \frac{624}{100}$$

$$5^{\frac{x}{2}} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$$

$$5^{\frac{x}{2}} = 5^{-2}$$

$$\frac{x}{2} = -2$$

$$x = -4$$

$$K = \{-4\}$$

EXPONENCIÁLNÍ ROVNICE
TEORETICKÁ ČÁST

Otázky, které mohou padnout při maturitní zkoušce:

1) Používají se při řešení exponenciální rovnice ekvivalentní nebo důsledkové úpravy?
2) Jaká pravidla využíváme při řešení exponenciálních rovnic?
3) Kdy exponenciální rovnice $a^x = b$ nemá řešení v množině R?
4) K jakému tvaru exponenciální rovnice při jejím řešení míříme?

1. Používají se při řešení exponenciální rovnice ekvivalentní nebo důsledkové úpravy?

Při řešení exponenciální rovnice se používají většinou ekvivalentní úpravy. Jedná se hlavně o násobení rovnice, přičítání čísla nebo výrazu atd. Případná úprava zlogaritmování je třeba ošetřit tak, aby obě logaritmované strany rovnice byly kladné. Jen výjimečně při řešení exponenciálních rovnic použijeme (ve zvláštních příkladech) umocnění rovnice, které je úpravou důsledkovou a přináší nám povinnost provést zkoušku, která by mohla vyloučit „falešný" kořen.

2. Jaká pravidla využíváme při řešení exponenciálních rovnic?

Používáme základní pravidla pro počítání s mocninami (uvádíme pouze pravidla bez podmínek):

$$a^s \cdot a^t = a^{s+t}$$

$$\frac{a^s}{a^t} = a^{s-t}$$

$$\left(a^s\right)^t = a^{s \cdot t}$$

$$a^s \cdot b^s = \left(a \cdot b\right)^s$$

$$\frac{a^s}{b^s} = \left(\frac{a}{b}\right)^s$$

Při počítání exponenciální rovnice může taky nastat potřeba rovnici logaritmovat a potom používáme pravidla pro počítání s logaritmy.

3. Kdy exponenciální rovnice $a^x = b$ nemá řešení v množině R?

Aby takováto rovnice měla řešení, nesmí být hodnota b záporná nebo rovna nule. Je to i jasné z grafu exponenciální funkce, který leží celý nad osou x.

4. K jakému tvaru exponenciální rovnice při jejím řešení míříme?

Cílem při řešení většiny exponenciálních rovnic je dobrat se k tvaru rovnice $a^x = a^y$. To znamená, že máme na levé i pravé straně mocniny o shodných základech. Jelikož se tyto mocniny rovnají, musí se rovnat i jejich exponenty a na základě této rovnosti exponentů sestavíme novou (jednodušší) rovnici.